14/11/19

Μέθοδος του Euler

: άμεση μέθοδος μονοβηματική

Συνεχές

ΠΑΤ (1): $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Διακριτό

ΠΑΤ (2): $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & 0 \le n \le N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Συνέπεια της Μεθόδου Euler (Τοπικό Σφάλμα)

$$\delta^n = \underbrace{y(t^{n+1})}_{\text{ακριβής λύση}} - \underbrace{\tilde{y}^{n+1}}_{\text{προσ. λύση}} = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Το τοπικό σφάλμα είναι τάξης ακρίβειας 2.
όταν το $h \to 0$ τότε το $\delta^n \to 0$
ή $O(h^2)$

Ευστάθεια της Euler

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

Θεωρώ τα ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} z' = f(t,z), & t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$

με ομοιομ. διαμ. με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} z^{n+1} = z^n + f(t^n, z^n) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$

Τότε $\max_{n} |y^n - z^n| \le C |y^0 - z^0|$, $C = e^{L(b-a)}$ → δεν εξαρτάται από το βήμα h.

Λήμμα: Έστω δ ένας θετικός αριθμός και $k, d_0, d_1, d_2, \dots$ μη αρνητικοί της $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + k$ (*)

$i = 0, 1, 2, \dots$

Τότε ισχύει: $d_n \le d_0 e^{n\delta} + k \frac{e^{n\delta}-1}{\delta}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Απ: Επαγωγικά:

$n=0$ Ισχύει $d_0 \le d_0 e^0 + k \frac{e^0 - 1}{\delta} = d_0$

$n \ge 1$ κ' λόγω της (*) έχουμε:

$$d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$$

$$(1+\delta)^n - 1 = [(1+\delta) - 1][1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}] = \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta) - 1}$$

Άρα $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta) - 1}$

γνωρίζω. $(1+\delta) \le e^\delta$ (από το ανάπτυγμα του εκθετικού)

άρα $d_n \le (1+\delta^n) d_0 + k \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta) - 1} \le e^{n\delta} d_0 + k \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$ □

Μέχρι τώρα ξέρουμε:

(1) $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$, $\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$

(2) $\max_{\forall n} |y^n - z^n| \le C |y^0 - z^0|$, $C = e^{L(b-a)}$

(3) Ακρίβεια της Euler.

$$\max |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L} (e^{L(b-a)} - 1) h$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|$$

Θεώρημα : (Ακρίβεια (της μεθόδου) ή ολικό σφάλμα Euler)

Έστω $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$, πληροί την ολική Lipschitz και $y \in C^2[a,b]$ η λύση του Π.Α.Τ. (1). Αν y^i, $i=0,1,2,\dots$ είναι οι προσεγγίσεις της Euler για ομοιομ., $h=\dfrac{b-a}{N}$ τότε:

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)}_{c_1} h, \quad \forall n$$

διαφορά αναλυτικής με προσεγγιστική

$M = \max\limits_{t \in [a,b]} |y''(t)|$

An.: Παίρνω τη διαφορά:

$\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1}$

(Εκφράζω την αναλυτική λύση: $y(t^{n+1})$ με το ανάπτυγμα Taylor)

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\underset{\substack{\| \\ h f(t^n, y(t^n))}}{y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

(από Euler:)

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$$

παίρνοντας τη διαφορά:

$$\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1} = y(t^n) - y^n + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right] + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$$

επειδή ισχύει η ολική Lipschitz:

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + hL|\varepsilon^n| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|$$

τριγωνική ιδιότητα

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le (1+hL)|\varepsilon^n| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|, \quad \forall n, \ n=0,1,2,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le (1+hL)|\varepsilon^n| + |\delta^n| \Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le (1+hL)|\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N-1}|\delta^i|$$

Απο το λήμμα προκύπτει:

$$|\varepsilon^n| \le e^{nhL}|\varepsilon^0| + \frac{e^{nhL}-1}{hL}\max_i|\delta^i|$$

(όπως αλλιώς η προσ. και η αναλ. λύση θα συμπίπταν)

$\varepsilon^0 = 0$,

$Nh = b-a$ (όταν $n=N$) → δηλ. φτάνω στο τέλος της διαμέρισης

Άρα: $$|\varepsilon^n| \le \frac{e^{L(b-a)}-1}{L}\,\frac{h}{2}\max_{t\in[a,b]}|y''(t)| \quad \forall n$$

παίρνοντας maximum:

$$\max_{0\le n\le N}|\varepsilon^n| = \max_{0\le n\le N}|y(t^n)-y^n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)}-1\right)h$$

όπου $M = \max_{t\in[a,b]}|y''(t)|$

↓

δηλ. το ολικό σφάλμα της μεθόδου είναι τάξης h.

Παρατηρήσεις:

(1) Το ολικό σφάλμα της Euler εξαρτάται απο τα δεδομένα του προβλήματος, a, b, y_0, f.

(2) Το φράγμα του σφάλματος είναι γινόμενο της $C = \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)}-1\right)$ ε' του h στην πρώτη δύναμη.

Η μέθοδος του Euler έχει τάξη <u>ακρίβειας τουλ. 1.</u>

Μπορούμε ν.δ.ο η Euler έχει ακριβώς τάξη ακρίβειας 1., με την βοήθεια ενός ΠΑΤ.

Παραδ.

$$(3)\begin{cases} y' = 2t\ ,\ t\in[0,1] \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Η μοναδικη αναλ. λυση του (3) ειναι η $y(t)=t^2\ ,t\in[0,1]$

$y'(t) = 2t\ ,\ y''(t)=2.$ ○○○ γνωριζω ότι είναι φραγμένη και μάλιστα σταθ. συνάρτηση

αρα ο όρος: $\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)$
δεν εξαρτάται απο το ξ^n

Θεωρώ τη διαμέριση $: n=0,1,2,\dots,N$ με βήμα
$h=\frac{1-0}{N} \Rightarrow h=\frac{1}{N} \Rightarrow Nh=1$ τότε $t^n = nh$ (και $t^N = Nh$)

Οι προσεγγίσεις του Euler είναι

$$y^{n+1} = y^n + 2ht^n \Rightarrow y^{n+1} = y^n + 2h(nh) \Rightarrow y^{n+1} = y^n + 2nh^2\ ,\ n=0,1,2,\dots,N-1$$

οπότε έχουμε ότι:

$$y^n = y^0 + 2[\underbrace{1+2+3+\dots+(n-1)}]h^2$$ → αθροισμα φυσικών: $\frac{n(n-1)}{2}$

(προέκυψε απο: $y^{n+1} = (y^{n-1} + 2(n-1)h^2) + 2nh^2 \Rightarrow y^{n+1} = y^{n-1} + 2[(n-1)+n]h^2$)

Αρα εχουμε: $y^n = y^0 + 2\frac{n(n-1)}{2}h^2 \Rightarrow y^n = \cancel{y^0}^{\,0} + n(n-1)h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^n = n(n-1)h^2\ ,\ n=0,1,\dots,N$

Για $n=N$: $y^N = N(N-1)h^2 = \underbrace{Nh}_{1}(\underbrace{Nh}_{1}-h) \Rightarrow y^N = 1-h$

Η αναλυτική $y(t)=t^2\ ,\ t=1$ τότε $y(1)=1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(1) - y^N = 1-(1-h) = h$. Αρα η ακρίβεια της Euler είναι ακριβώς τάξης 1.

Σφάλμα Στρογγύλευσης

Επειδή η τάξη ακρίβειας της Euler είναι 1 αρκετά μικρή για να πάρουμε "καλές" προσεγγίσεις πρέπει να πάρουμε πολύ μικρό h. Επειδή οι πράξεις γίνονται με υπολογιστές πεπερασμένης ακρίβειας τα σφάλματα στρογγύλευσης συσσωρεύονται και αλλοιώνουν το αποτέλεσμα.

Περιοχή Απόλυτης Ευσταθείας

Θεωρούμε το γραμμικό Π.Α.Τ.

$$(4)\ \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} ,\ t \in [0, \infty) ,\ \lambda < 0$$

Απ.: Η λύση της Σ.Δ.Ε. είναι $y(t) = e^{\lambda t}$ φθίνει ασυμπτωτικά στο 0 όταν $t \to \infty$. Έστω ομοιομ. διαμ. με $t^n = nh$ και για την ~~προσ.~~ λύση που δίνει η μέθοδος του Euler έχουμε την ακολουθία:

$$:\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

Από την ακολουθία: $y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n$

$\Rightarrow y^{n+1} = (1+\lambda h)(1+\lambda h) y^{n-1} \Rightarrow$

$y^{n+1} = (1+\lambda h)^3 y^{n-2} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{n+1} = (1+\lambda h)^{n+1} y^0$

★

όμως $y(0)=1$ άρα $y^{n+1}=(1+\lambda h)^{n+1}$.

Τελικά : $y^n=(1+\lambda h)^n$, $n=0,1,\dots,N$ (προσ. λυση)

Απο την εκφραση του χρόνου : $t^n = nh$

$h=\frac{t}{n}$: $y^n = \left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n$ γνωστη ακολουθια που συγκλινει.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e \in (2,3)$. Αρα $\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$

δηλ. $y^n=\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$ δηλ. συγκλινει στην λυση του ΠΑΤ.

Για $n \geq 0$

$|y^n| = |1+\lambda h|^n$ • Οταν το $|1+\lambda h|<1$ τότε: $|y^n| \to 0$

• Οταν το $|1+\lambda h|=1$ τότε: $|y^n| \to 1$ ($|y^n|=1$)

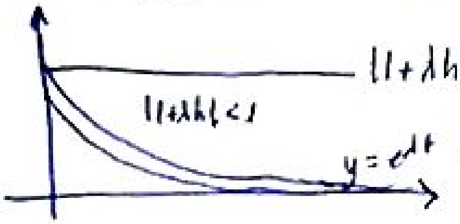
• Οταν το $|1+\lambda h|>1$ τότε : $|y^n| \to \infty$

Επομενως η αριθμ. μεθοδος δινει "καλές" προσεγγισεις όταν $|1+\lambda h|<1 \Rightarrow$

$-1 < 1+\lambda h < 1 \Rightarrow -2 < \lambda h < 0 \Rightarrow \lambda h \in (-2,0)$

(αν πάρω τα όρια η λύση πάει στο 1) οταν βγω εξω απο αυτό η λυση πάει στο ∞

Άρα όταν $|1+\lambda h| \leq 1$ τότε παίρνουμε φραγμένες προσεγγισεις , τότε $\lambda h \in [-2,0]$



Παρατήρηση : (a) Μια μέθοδος για την αριθμητική επιλυση του (1) είναι απολυτα ευσταθής για κάποιο $h>0$ όταν εφαρμοστεί το ΠΑΤ. (4) και δίνει φραγμένες προσεγγισεις , y^n , $n \to +\infty$

Το διάστημα $I = [a, 0]$ με $\infty < a \leq 0$ λέγεται διάστημα απολυτης ευστάθειας της μεθόδου.

(β) Η μέθοδος του Euler είναι απόλυτα ευσταθής με την προϋπόθεση ότι $\lambda < 0$ για $0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$

Αν το $|\lambda|$ είναι μεγάλο, η συνθήκη αποτελεί μεγάλο περιορισμό για το μέγιστο βήμα της μεθόδου.

Οι άμεσες μεθοδοι (οπως η Euler) είναι ευσταθείς κάτω απο συγκεκριμένες συνθήκες.